ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ (43)

ΔΟΜΗ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ ΚΑΙ ΕΞΕΤΑΣΤΕΑ ΥΛΗ

Διάρκεια εξέτασης: **Τρεις (3) ώρες**

Δομή εξεταστικού δοκιμίου και επιμέρους βαθμολογία:

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από δύο μέρη, το ΜΕΡΟΣ Α΄ και το ΜΕΡΟΣ Β΄.

Το ΜΕΡΟΣ Α΄ περιλαμβάνει 10 θέματα και το ΜΕΡΟΣ Β΄ περιλαμβάνει 5 θέματα.

Κάθε θέμα του ΜΕΡΟΥΣ Α΄ βαθμολογείται με 5 μονάδες ενώ κάθε θέμα του ΜΕΡΟΥΣ Β΄ βαθμολογείται με 10 μονάδες.

Οι υποψήφιοι πρέπει να λύσουν και τα 15 θέματα.

Σημειώσεις: α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
β) Θα χορηγείται τυπολόγιο Μαθηματικών.

Γενικές παρατηρήσεις:

1. Επειδή η φύση του μαθήματος είναι τέτοια ώστε κάθε νέα γνώση να στηρίζεται σε προηγούμενη γνωστή ύλη, τονίζεται ότι οι υποψήφιοι οφείλουν να γνωρίζουν τις βασικές έννοιες, ιδιότητες και βασικά θεωρήματα των ενοτήτων που διδάχθηκαν στις προηγούμενες τάξεις, αλλά δεν συμπεριλαμβάνονται στην εξεταστέα ύλη, γιατί πολύ πιθανόν η λύση κάποιων ασκήσεων να απαιτεί και γνώσεις από τις ενότητες αυτές.
2. Όπου αναφέρεται διατύπωση ορισμών και θεωρημάτων, αυτά θα διατυπώνονται όπως είναι στα σχολικά εγχειρίδια έκδοσης 2019.

I. Εφαρμογές του Διαφορικού Λογισμού

1. Ορισμοί: Γνησίως αύξουσα, Αύξουσα, Γνησίως φθίνουσα, Φθίνουσα και Σταθερή συνάρτηση. Εφαρμογή στην επίλυση προβλήματος.
2. Θεώρημα Μέγιστης - Ελάχιστης τιμής. Εφαρμογή στην επίλυση προβλήματος.
3. Ορισμοί ολικών ακροτάτων (ολικό μέγιστο, ολικό ελάχιστο), τοπικών ακροτάτων (τοπικό μέγιστο, τοπικό ελάχιστο). Εφαρμογή στην επίλυση προβλήματος.
4. Θεώρημα (κριτήριο) μονοτονίας για γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα και σταθερή συνάρτήση. Εφαρμογή στην επίλυση προβλήματος.
5. Θεώρημα του *Fermat* . Διατύπωση, Γεωμετρική ερμηνεία και εφαρμογή στην επίλυση προβλήματος.
6. Θεώρημα (κριτήριο της πρώτης παραγώγου) εύρεσης τοπικών ακροτάτων. Εφαρμογή του στην επίλυση προβλήματος.

7. Εύρεση των τοπικών ακρότατων, ολικών ακροτάτων σε διάστημα και εφαρμογή στην επίλυση προβλήματος.
8. Ορισμοί: Κυρτή/κοίλη συνάρτηση, σημείο καμπής γραφικής παράστασης. Εφαρμογή στην επίλυση προβλήματος.
9. Θεώρημα κυρτότητας συνάρτησης και θεώρημα εύρεσης σημείων καμπής. Εφαρμογή τους στην επίλυση προβλήματος.
10. Μελέτη πολυωνυμικών συναρτήσεων μέχρι και 3ου βαθμού και κατασκευή της γραφικής τους παράστασης.
11. Εφαρμογή των θεωρημάτων για τη μονοτονία και τα ακρότατα συνάρτησης στην επίλυση προβλημάτων με μέγιστα και ελάχιστα.

II. Αόριστο ολοκλήρωμα

1. Ορισμός του αόριστου ολοκληρώματος. Εφαρμογή στην επίλυση προβλήματος.
2. Εύρεση βασικών αόριστων ολοκληρωμάτων και εφαρμογή στην επίλυση προβλήματος.

$$a)\quad \int a\,dx = ax + C \qquad\qquad \beta)\quad \int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C\,,\quad \forall r \in \mathbb{R} - \{1\}$$

3. Ιδιότητες του αόριστου ολοκληρώματος.

$$a)\ \int \alpha f(x)dx = a \int f(x)\,dx$$

$$\beta)\ \int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Εφαρμογή στην επίλυση προβλήματος

4. Υπολογισμός της σταθεράς ολοκλήρωσης c και εφαρμογή στην επίλυση προβλημάτων αρχικών τιμών.

III. Σύνολα – Συνδυαστική – Πιθανότητες

1. Ιδιότητες πράξεων συνόλων.
2. Αρχή του αθροίσματος και της θεμελιώδους αρχής της απαρίθμησης (πολλαπλασιαστική αρχή). Εφαρμογή τους στη επίλυση προβλήματος.
3. Ορισμός του παραγοντικού ενός φυσικού αριθμού ν $(\nu!)$. Διατύπωση και εφαρμογή στην επίλυση προβλήματος.
4. Υπολογισμός και εφαρμογή στη επίλυση προβλημάτων των:
   - Μεταθέσεων των ν διαφορετικών αντικειμένων, (M_ν)
   - Επαναληπτικών μεταθέσεων των ν αντικειμένων, (M_ν^ε)

- Κυκλικών μεταθέσεων των ν διαφορετικών αντικειμένων, (K_ν)
- Διατάξεων ν διαφορετικών αντικειμένων ανά κ, (Δ_κ^ν)
- Επαναληπτικών διατάξεων ν διαφορετικών αντικειμένων ανά κ, (δ_κ^ν)
- Συνδυασμών ν διαφορετικών αντικειμένων ανά κ, $\binom{\nu}{\kappa}$

5. Ορισμοί: Πείραμα τύχης, Δειγματικός χώρος, Ενδεχόμενο, Απλό ενδεχόμενο, βέβαιο και αδύνατο ενδεχόμενο. Εφαρμογή στην επίλυση προβλήματος.

6. Ορισμός του Συμπληρώματος ενός ενδεχομένου σε ένα δειγματικό χώρο, των Αντίθετων ενδεχομένων και Ασυμβίβαστων ενδεχόμενων. Διατύπωση και εφαρμογή στην επίλυση προβλήματος.

7. Κλασσικός ορισμός της πιθανότητας κατά *Laplace*. Εφαρμογή στην επίλυση προβλήματος.

8. Αξιωματικός ορισμός *Kolmogorov* στις πιθανότητες. Εφαρμογή στην επίλυση προβλήματος.

9. Ιδιότητες των πιθανοτήτων:

$P(\emptyset) = 0,$ $\quad 0 \leq P(A) \leq 1,$

$P(A - B) = P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B),$ $\quad P(A') = 1 - P(A),$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Εφαρμογή στην επίλυση προβλήματος.

10. Δεσμευμένη ή υπό συνθήκη πιθανότητα. Εφαρμογή στην επίλυση προβλήματος και εφαρμογή του τύπου $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

11. Ορισμός: Ανεξάρτητα ενδεχόμενα. Διατύπωση και εφαρμογή στην επίλυση προβλήματος.

Σημείωση: Βοήθημα για τους υποψηφίους θα μπορούσαν να είναι και τα πιο κάτω:

1. **Μαθηματικά Γ’ Λυκείου Κοινού Κορμού, Α’ Τεύχος**, ΥΑΠ 2019
2. **Μαθηματικά Γ’ Λυκείου Κοινού Κορμού, Β’ Τεύχος**, ΥΑΠ 2019

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΙΣ ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

1. Στατιστική

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i - \bar{x})^2}{\nu}} \text{ ή } \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\kappa} f_i(x_i - \bar{x})^2}{\nu}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\kappa} f_i x_i^2}{\nu} - \bar{x}^2},$$

$$\text{όπου } \nu = \sum_{i=1}^{\kappa} f_i$$

$$r = \frac{\Sigma_{xy} - \nu\bar{x}\bar{y}}{\nu S_x S_y}, \text{ όπου } \Sigma_{xy} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_\nu y_\nu$$

2. Τριγωνομετρία

$$\eta\mu(A \pm B) = \eta\mu A\sigma\upsilon\nu B \pm \sigma\upsilon\nu A\eta\mu B$$

$$\sigma\upsilon\nu(A \pm B) = \sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B \mp \eta\mu A\eta\mu B$$

$$2\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta = \eta\mu(\alpha - \beta) + \eta\mu(\alpha + \beta)$$

$$2\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)$$

$$2\,\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) - \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)$$

$$\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha \qquad \sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha$$

$$\eta\mu^2\alpha = \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2} \qquad \sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

$$\eta\mu 2\alpha = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \sigma\upsilon\nu 2\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad t = \varepsilon\varphi\alpha$$

$$\eta\mu A + \eta\mu B = 2\eta\mu\frac{A+B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}$$

$$\eta\mu A - \eta\mu B = 2\,\eta\mu\frac{A-B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B = 2\,\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu A - \sigma\upsilon\nu B = 2\,\eta\mu\frac{B-A}{2}\,\eta\mu\frac{A+B}{2}$$

Λύση τριγωνομετρικών εξισώσεων:

	Σε μοίρες	**Σε ακτίνια**
$\eta\mu x = \eta\mu\alpha$	$x = 360^o\kappa + \alpha$ ή $x = 360^o\kappa + 180^o - \alpha, \quad \kappa\in\mathbb{Z}$	$x = 2\pi\kappa + \alpha$ ή $x = 2\pi\kappa + \pi - \alpha, \quad \kappa\in\mathbb{Z}$
$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\alpha$	$x = 360^o\kappa\pm\alpha, \quad \kappa\in\mathbb{Z}$	$x = 2\pi\kappa\pm\alpha, \quad \kappa\in\mathbb{Z}$
$\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\alpha$	$x = 180^o\,\kappa + \alpha, \quad \kappa\in\mathbb{Z}$	$x = \pi\kappa + \alpha, \quad \kappa\in\mathbb{Z}$

3. Γεωμετρία

Ορθό πρίσμα	$E\pi = \Pi_\beta.\upsilon$	$V = E_\beta.\upsilon$
Κανονική Πυραμίδα	$E_\pi = \frac{1}{2}\Pi_\beta\cdot h$	$V = \frac{E_\beta.\upsilon}{3}$
Κύλινδρος	$E_\kappa = 2\pi R\upsilon$	$V = \pi R^2\upsilon$
Κώνος	$E_\kappa = \pi R\lambda$	$V = \frac{\pi R^2\upsilon}{3}$
Κόλουρος Κώνος	$E_\kappa = \pi(R + \rho)\lambda$	$V = \frac{\pi\upsilon}{3}(R^2 + R\rho + \rho^2)$
Σφαίρα	$E = 4\pi R^2$	$V = \frac{4\pi R^3}{3}$

4. Αναλυτική Γεωμετρία

Απόσταση των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Απόσταση του σημείου $A(x_1, y_1)$ από την ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$: $d = \frac{|Ax_1+By_1+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

Έλλειψη

$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad \gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}, \quad \alpha > \beta$

Εστίες ($\pm$ γ,0), Διευθετούσες $x = \pm\frac{\alpha}{\varepsilon}$,

Εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha}$

5. Παράγωγοι

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x \qquad (\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x \qquad (\varepsilon\varphi x)' = \tau\varepsilon\mu^2 x \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

6. Ολοκληρώματα

$$\int \tau\varepsilon\mu x \, dx = \ln|\tau\varepsilon\mu x + \varepsilon\varphi x| + c \qquad \int \sigma\tau\varepsilon\mu x \, dx = \ln\left|\varepsilon\varphi \frac{x}{2}\right| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} = \tau o\xi\eta\mu \frac{x}{\alpha} + c \qquad \int \frac{dx}{\alpha^2 + x^2} = \frac{1}{\alpha} \tau o\xi\varepsilon\varphi \, \frac{x}{\alpha} + c$$

7. Απλός Τόκος

$$T = \frac{K.E.X}{100}$$